Matematika v ekonomii

Přednáška 1

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Funkce - definice

- Funkce je předpis, který každému x z jedné množiny (definičního oboru) přiřadí jedno y z druhé množiny (oboru hodnot.
- Zapisujeme: y = *f(x).*
- Například: $y = \sin x$; $y = 4x + 1$; …

- V ekonomii většinou pracujeme s nezápornými čísly (viz cena, poptávané množství, apod.).

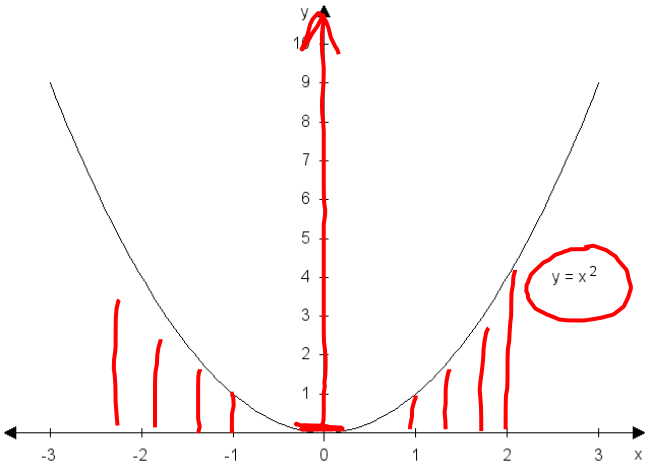
Graf funkce

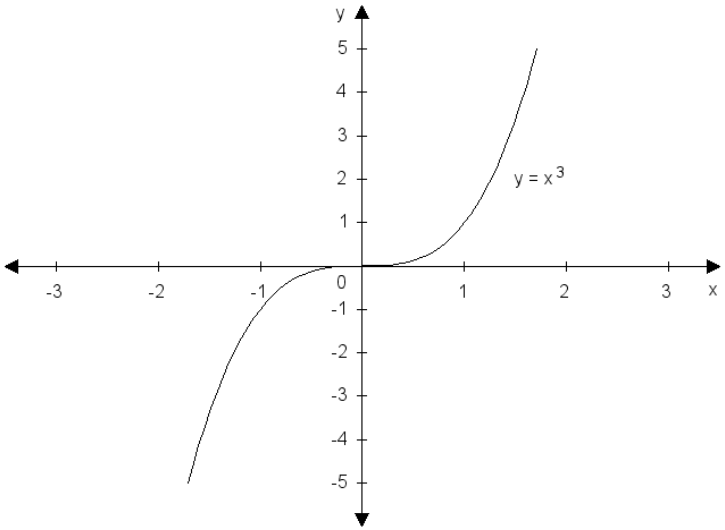
- Množina všech uspořádaných dvojic (x, f(x)).
- Ve 2-rozměrném případě je grafem křivka.

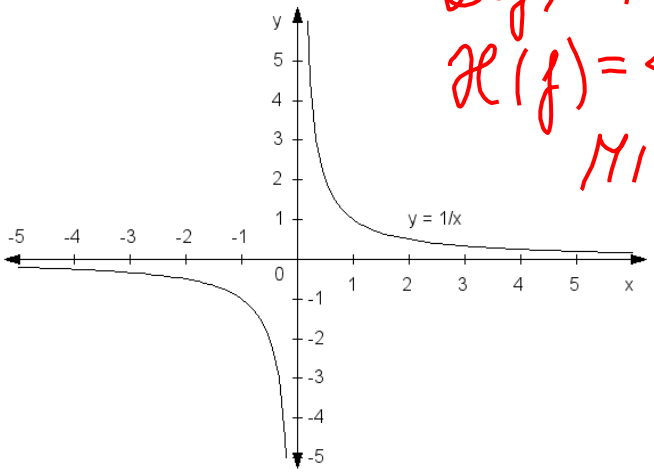
Příklady:

- Lineární funkce, grafem je přímka.
- Kvadratická funkce, grafem je parabola,
- Lineární lomená funkce, grafem je hyperbola.

Příklady grafů







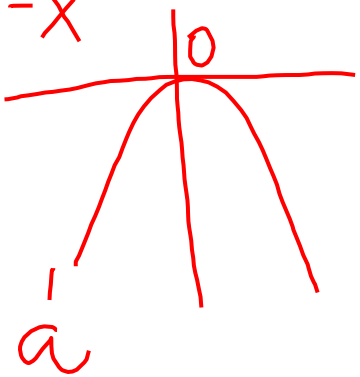
$D(f) = R$

$H(f) = \langle 0; \infty)$

$MIN = [0; 0]$

konvexní

$y = -x^2$



Základní vlastnosti funkcí

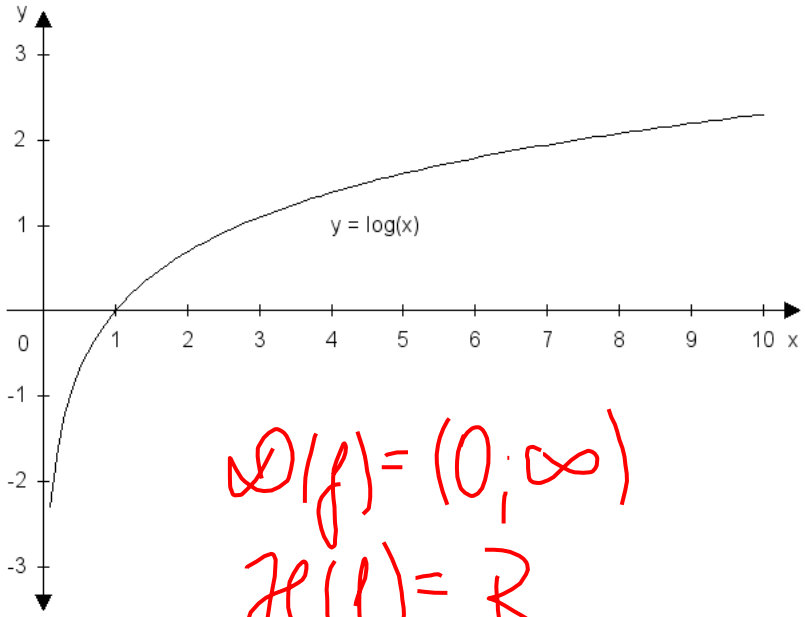
- Definiční obor a obor hodnot,
- Monotónnost,
- Extrémy,
- Konvexnost a konkávnost,
- Inflexní body,
- Omezenost,
- Sudost/lichost,
- Periodičnost.

Základní funkce

- Lineární funkce: $y = ax + b$,
- Kvadratická funkce: $y = ax^2 + bx + c$
- Polynomická funkce: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$
- Lineární lomená funkce: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$
- Logaritmická funkce: $y = \log_a x$

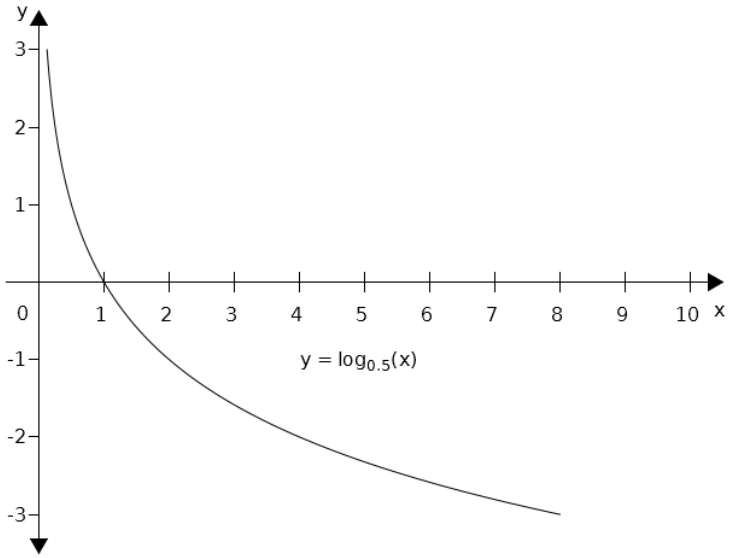
V logaritmické funkci, *a* je tzv. základ logaritmu. Dekadický logaritmus: *a* = 10, přirozený logaritmus: *a* = *e* = 2,718…

Grafy log funkce



$D(f) = (0; \infty)$

$H(f) = R$

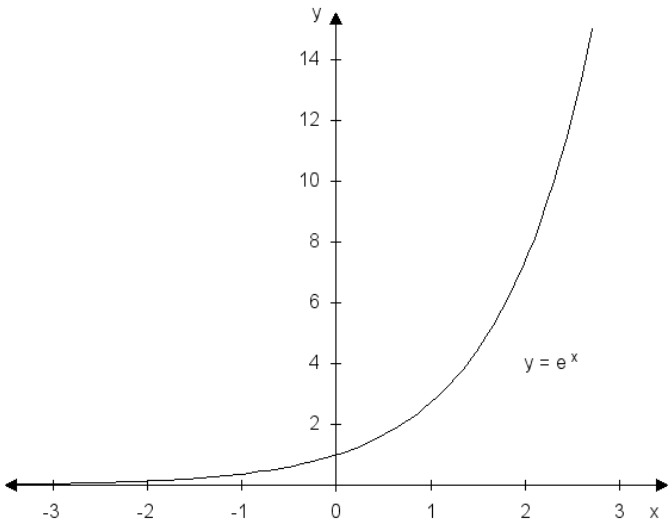


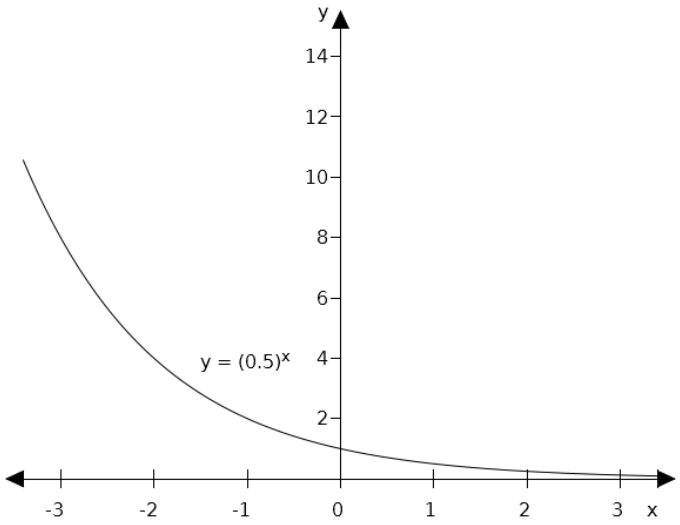
Základní funkce - pokračování

- Exponenciální funkce: $y = a^x, a > 0$
- Goniometrické funkce: y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = cotgx.
- Cyklometrické funkce: y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arccotgx.

Pozn.: Exponenciální a logaritmické funkce jsou inverzní (vzájemně opačné). To samé platí pro goniometrické a cyklometrické funkce.

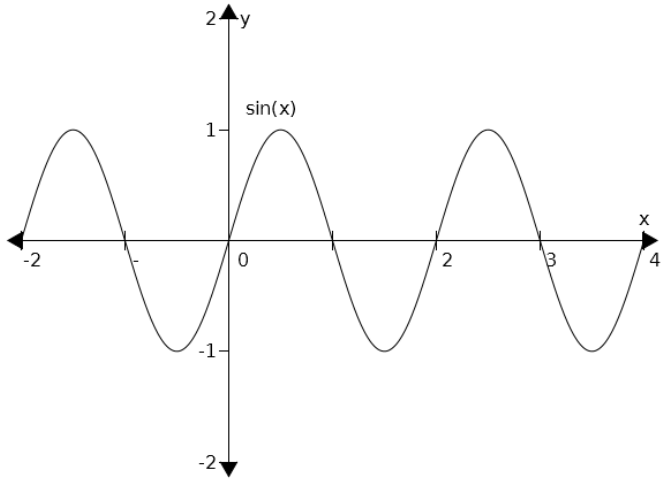
Grafy exp funkce

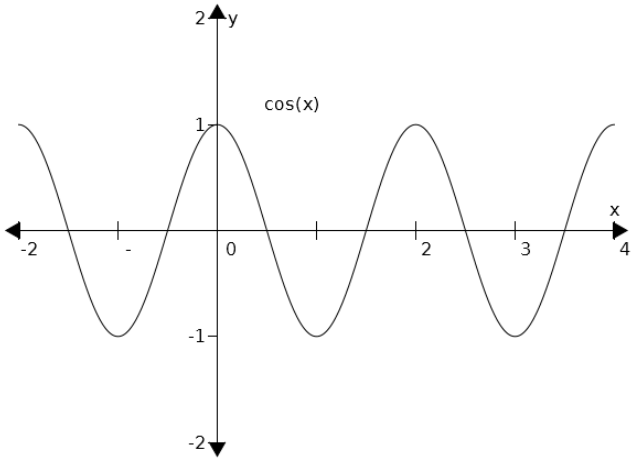


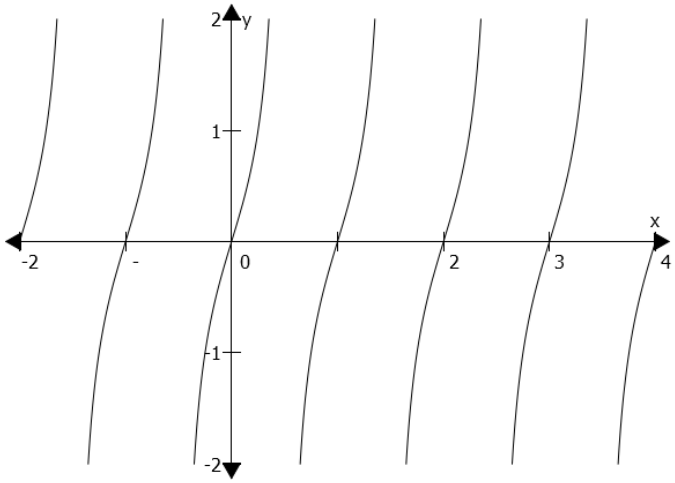


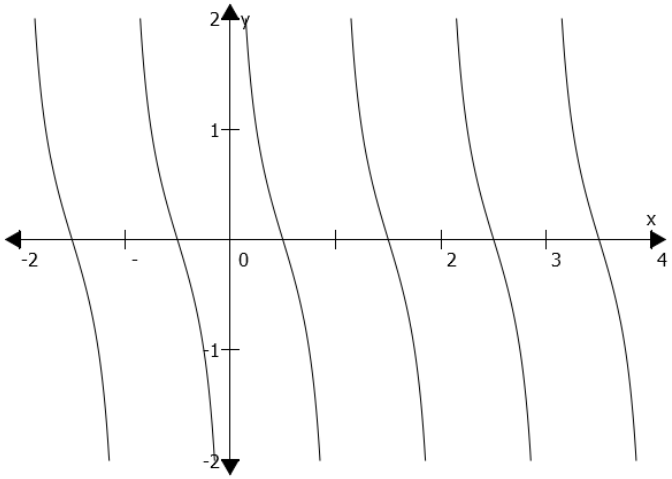
Pro $a > 1$ je exp funkce rostoucí, pro $a < 0$ klesající.

Grafy goniometrických funkcí









Polynomy

V ekonomii jsou polynomické funkce často používány, viz např. funkce poptávky a nabídky. Hlavními úkoly při práci s polynomy je najít jejich nulové body a zjednodušit je pomocí vzorců nebo vytýkáním.

Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně *n*.

Potom kořeny polynomu jsou taková *x*, že $P_n(x) = 0$.

Je dán polynom $P_n(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Rozložte jej na součin a určete jeho nulové body.

Řešení:
Polynom upravíme na součin:

$$P_n(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x\left(x - 3\right)^2$$

Nulové body jsou 0 a 3.

$y = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$

$y = \sqrt{x}$; $x \geq 0$

$y = \log_a x$; $x > 0$

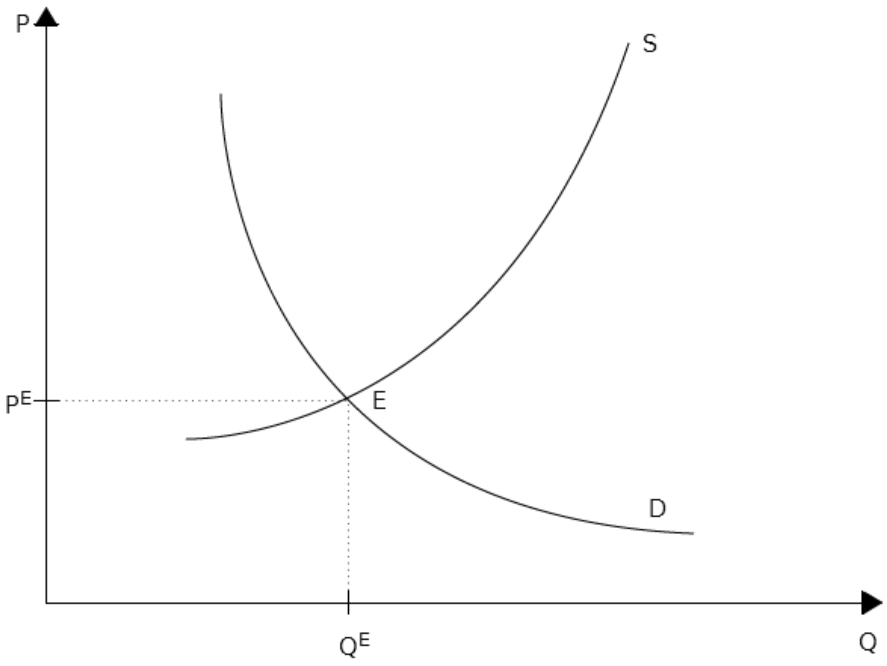
$y = \arcsin x$ $\quad -1 \leq x \leq 1$

$y = \arccos x$ $\rightarrow$ grafy

Funkce poptávky a nabídky, rovnováha

- Funkce poptávky vyjadřuje vztah mezi cenou zboží (P) a poptávaným množstvím (Q).
- Píšeme, že Q= D(P). Funkce poptávky je klesající.
- Funkce nabídky vyjadřuje vztah mezi cenou zboží a nabízeným množstvím.
- Píšeme, že Q= S(P). Funkce nabídky je rostoucí.
- Bod, v němž nastává rovnost funkce poptávky a nabídky, se nazývá rovnovážný bod (rovnováha).

Funkce poptávky a nabídky



Poptávka a nabídka

Jsou dány funkce poptávky a nabídky: $Q_D = 10 - P$, $Q_S = -2 + P$.
Určete bod rovnováhy.

Řešení: v bodě rovnováhy jsou si obě funkce rovny:

$$10 - P = -2 + P$$

Řešením rovnice obdržíme: $P_E = 6$, $Q_E = 4$. (Obě funkce si nakreslete!)

Samostatné úlohy

e) $-1 \le x+1 \le 1$

$-2 \le x \le 0$ $\quad x \in \langle -2; 0 \rangle$

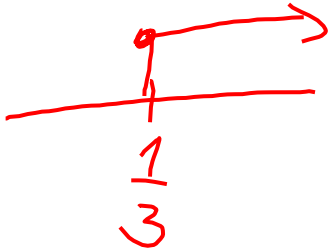
Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \sqrt{3x-1}$

$3x - 1 \ge 0$

$3x \ge 1$

$x \ge \frac{1}{3}$



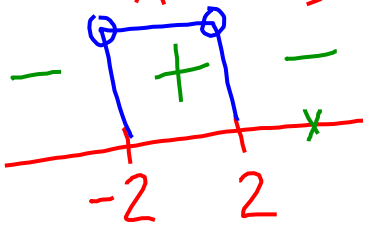
$x \in \langle \frac{1}{3}; \infty)$

b) $y = \dfrac{x+5}{x^2-1}$

c) $y = \log\left(4 - x^2\right)$

c) $4 - x^2 > 0$

$(2-x)(2+x) > 0$



$x \in (-2; 2)$

d) $y = \sqrt{x^2 - x - 2} + \dfrac{1}{x-2}$

e) $y = \arcsin(x+1)$

Úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné
Derivace funkce

Nechť y = f (x) je funkce jedné reálné proměnné. Derivace funkce f je definována takto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivaci funkce značíme f´(x) nebo y´.

Geometrická interpretace derivace: Derivace funkce je rovna směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě.

Pravidla derivování

Nechť f(*x*) a g(*x*) jsou funkce na intervalu $J \subseteq R$

i) $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$

v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivace základních funkcí

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$f(x)$	$f'(x)$
konstanta	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

1) $(4x^3+8x^2-6x+1)' = 12x^2+16x-6$

2) $(\underline{\sin x}\cdot x^6)' = \cos x \cdot x^6 + \sin x \cdot 6x^5$

3) $\left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$

4) $\left[\ln(4x^5+8)^7\right]' = \left[7\cdot\ln(4x^5+8)\right]' =$

$\boxed{\ln x^n = n\cdot\ln x}$ $= 7\cdot\dfrac{1}{4x^5+8}\cdot 20x^4$

Logaritmická derivace

Funkce typu $y = f(x)^{g(x)}$ derivujeme speciálním způsobem:

$$y = f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \,/'$$

$$\frac{1}{y} y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$y' = y \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$

Logaritmická derivace – řešený příklad

Určete derivaci funkce $y = x^x$

Řešení:

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x \,/\acute{}$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + 1$$

$$y' = y[\ln x + 1]$$

$$y' = x^x [\ln x + 1]$$

$$y = (\sin x)^x$$

$$\ln y = \ln (\sin x)^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln(\sin x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$y' = y \cdot \left\{ \quad \right\}$$

Průběh funkce - monotónnost

Monotónnost:
Funkce y = f(x) se nazývá rostoucí na intervalu J = (a,b) jestliže:

$$\forall x_1, x_2 \in J, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$$

Klesající funkce:

$$\forall x_1, x_2 \in J, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$$

Monotónnost určujeme pomocí (první) derivace: v bodech, v nichž je derivace kladná, je funkce rostoucím, a naopak.

Průběh funkce – konvexnost a konkávnost

Funkce $y = f(x)$ se nazývá periodická, pokud existuje reálné p
Takové, že $f(x) = f(x+np)$ pro všechna n a x.

Funkce $y = f(x)$ se nazývá konvexní na intervalu J,
Jestliže $f''(x) > 0$ pro všechna x z J.

Funkce $y = f(x)$ se nazývá konkávní na intervalu J,,
jesltiže $f''(x) < 0$ pro všechna x z J.

V bodech, v nichž se mění konvexnost na konkávnost,
nebo opačně, se nazývá inflexní bod.

Průběh funkce – extrémy funkce, monotónnost funkce, kovexnost a konkávnost, inflexní body

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$\Rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$3 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$

$3 \cdot (x-3)(x-1) = 0$

$x_1 = 3; \quad x_2 = 1$

STACIONÁRNÍ BODY

$y'' = 6x - 12 = 0$

$y''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$

$\hookrightarrow$ MIN

$y''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$

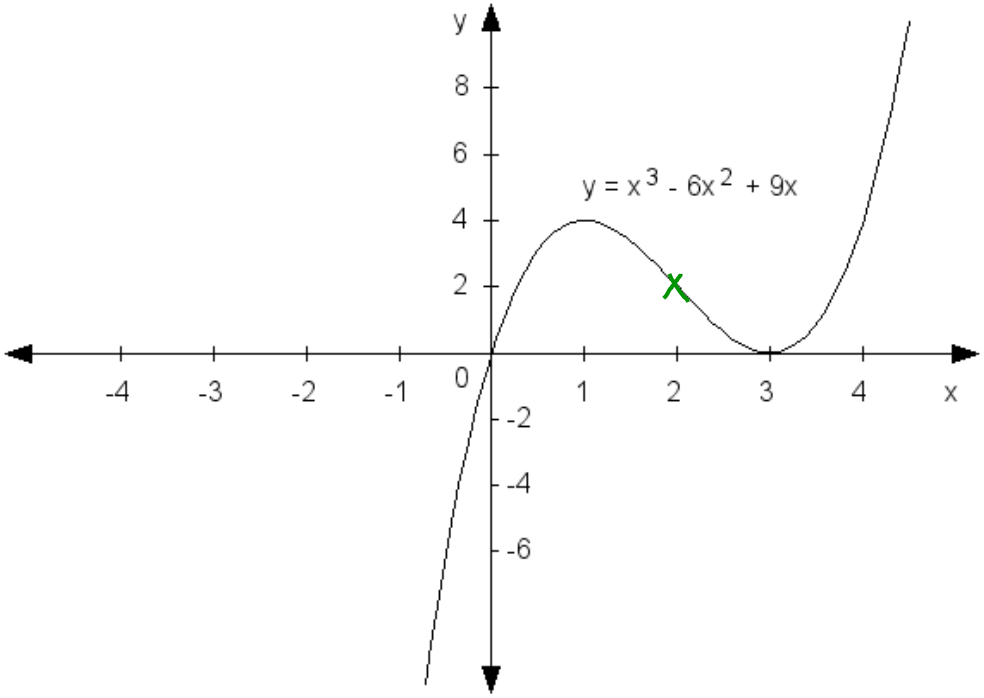
$\hookrightarrow$ MAX

$x = 2 \Leftrightarrow$? INF ?

$y''' = 6 \neq 0$

$\Downarrow$ INF

Graf funkce



Samostatné úlohy

Určete extrémy funkcí:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 4$

b) $f(x) = -2x^2 + 12x$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$