Matematika v ekonomii

Přednáška 2

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Diferenciál funkce
(přírůstek funkce)

Diferenciálem funkce y = f(x) nazýváme funkci dy (df):

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Diferenciál funkce (přibližně) vyjadřuje přírůstek funkce (dy) v závislosti na přírůstku x (dx). Jde vlastně o linearizaci dané fukce.

$dx = 0{,}1$

Příklad. Určete diferenciál funkce $y = x^2$ v bodě x_0 = 4. $x_1 = 4{,}1$

Řešení: dy=2xdx, dosadíme x = 4 a obdržíme: dy = 8dx.

$dy = 8 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}8}}$

Diferenciál funkce – řešený příklad

Určte derivaci funkce $y = x^3 + 1$. Určete také přírůstek funkce pro x = 2 a dx = 0,1.

Řešení:

Derivace: $y' = 3x^2$

Diferenciál: $dy = 3x^2 dx$

Přírůstek dy: $dy = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$

Taylorova a Maclaurinova řada

Nechť má funkce y = f(x) derivace do n-tého řádu. Pak její Taylorova řada (rozvoj, polynom) má tvar:

$$T_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \quad \dots \quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

- Pro a = 0 dostáváme Maclaurinovu řadu:

$$T_n(f,0,x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \quad \dots \quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 + 8x - 1$; $\boxed{a = -1}$

$f(-1) = (-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1) - 1 = -8$

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 8$

$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 8 = \underline{\underline{7}}$

$3 \quad -4 \quad +8$

$f''(x) = 6x + 4$

$f''(-1) = 6\cdot(-1) + 4 = -2$

$f'''(x) = 6$

$f'''(-1) = \underline{6}$

$f(x) = -8 + \frac{7}{1!}(x+1) - \frac{2}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3$

podle mocnin $(x+1) \Rightarrow a = -1$

$\rightarrow$ $(x-4) \Rightarrow a = 4$

Taylorova řada – řešený příklad

Určete Maclaurinovu řadu funkce $y = e^x$. $a = 0$

$$\boxed{e^0 = 1}$$

Řešení:

$f(0) = e^0 = 1,$ ✓

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1,$ ✓

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1,$ ✓

$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1,$ ✓

....

Dostáváme tak výsledek:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}$$

$e^4 = ?$; čtyřčlenný MR

$\rightarrow$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

$e^4 = 1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} =$? e^4

$\rightarrow$ $y = e^{\sqrt{x}}$; 5členný MR

$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{4!}$

$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^3}}{6} + \frac{x^2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Taylorova řada – řešený příklad

Určete Taylorův polynom funkce $y = \sqrt{x}$ v bodě a = 1.

Řešení:

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{4\sqrt{1^3}} = -\frac{1}{4}$$

.....

A výsledný Taylorův polynom:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \ldots$$

Ekonomické aplikace derivace

Elasticita funkce y = f(x):

$$E(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} y'$$

Cenová elasticita poptávky:

$$E(P) = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$$

Cenová elasticita nabídky:

$$E(P) = \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$$

Ekonomické aplikace derivace (pokračování)

Mezní produkt práce: $MP_L = \frac{dQ}{dL}$

Mezní příjem: $MR = \frac{dTR}{dQ}$

Mezní náklady: $MC = \frac{dTC}{dQ}$

Ekonomické aplikace derivace – řešené příklady

Určete mezní produkt práce, je-li $Q = 12L^3 - 6L$.

Řešení: Derivujeme produkci: $\dfrac{dQ}{dL} = 36L^2 - 6$

Určete elasticitu funkce $f(x) = 5x^3$

Řešení: $E(x) = \dfrac{x}{y} y' = \dfrac{x}{5x^3} 15x^2 = 3$

Rozklad racionálně lomené funkce na součet parciálních zlomků

→ ryze lomená: st č < st jm

$$\frac{st \le 6}{(x+1)^3 \cdot x^1 \cdot \underbrace{(x^2+1)}_{D<0}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x} + \frac{Ex+F}{\underbrace{x^2+1}_{D<0}}$$

$$\frac{x}{\underbrace{x^2-9}_{(x-3)^1\cdot(x+3)^1}} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \qquad \Big| \cdot (x-3)(x+3)$$

$$x = A(x+3) + B(x-3)$$

$x=-3$: $\quad -3 = B\cdot(-6)$

$\frac{1}{2} = B$ ✓

$x=3$: $\quad 3 = A\cdot(6)$

$\frac{1}{2} = A$ ✓

$$\frac{x}{x^2-9} = \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x+3)}$$