# Matematika v ekonomii

## Přednáška 3

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

## Diferenciální počet dvou proměnných

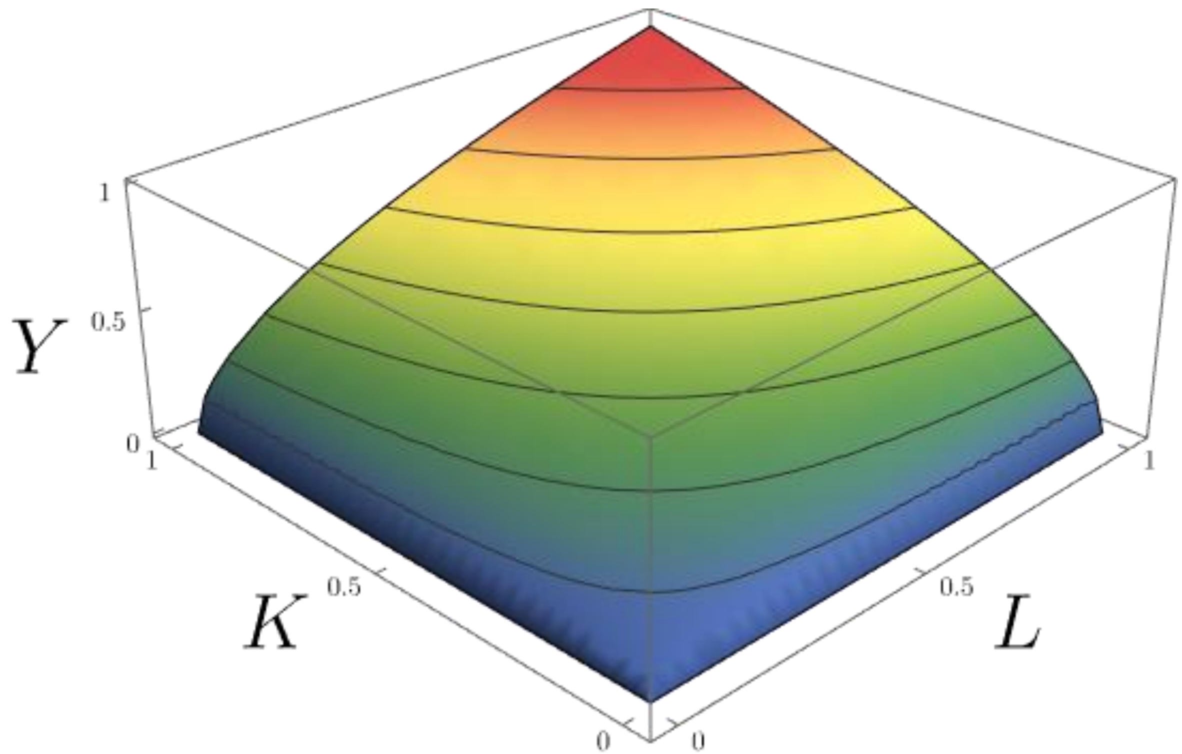
Řada ekonomických funkcí obsahuje více než jednu (vysvětlující, nezávislou) proměnnou.

Typickým příkladem je Cobb-Douglasova funkce, která Obsahuje kapitál K, práci L a technologický člen A:

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta} \qquad \alpha + \beta = 1$$

Dále se omezíme na funkce pouze dvou proměnných. Grafem těchto funkcí je „plocha“ v 3-DIM, viz dále.

# Cobb-Douglasova funkce



# Definiční obor – řešený příklad

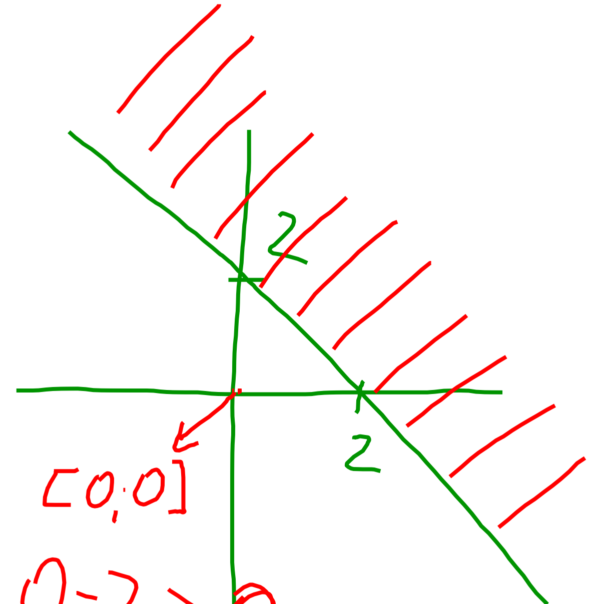
Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{x+y-2}$ .

.

$x+\overset{0}{y}-2 \ge 0$

přímka $[2;0]$

$[0;2]$




$0+0-2 \ge 0$

$-2 \ge 0$

# Definiční obor – řešený příklad

Určete definiční obor funkce: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$.

$x^2+y^2-9 \geq 0$

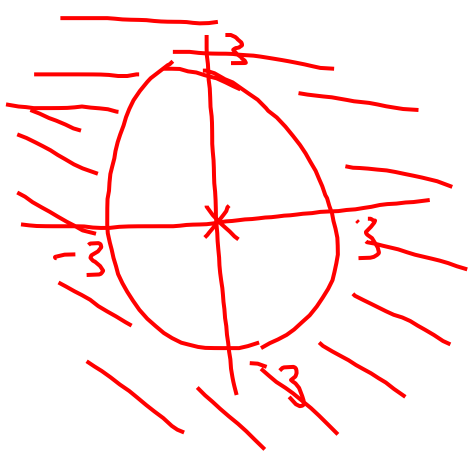
$x^2+y^2 \geq 9$ $\to r^2$

$S[0;0]$

$k: (x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

$S[\cancel{0};\cancel{0}]\quad r$

$S[m;n]$



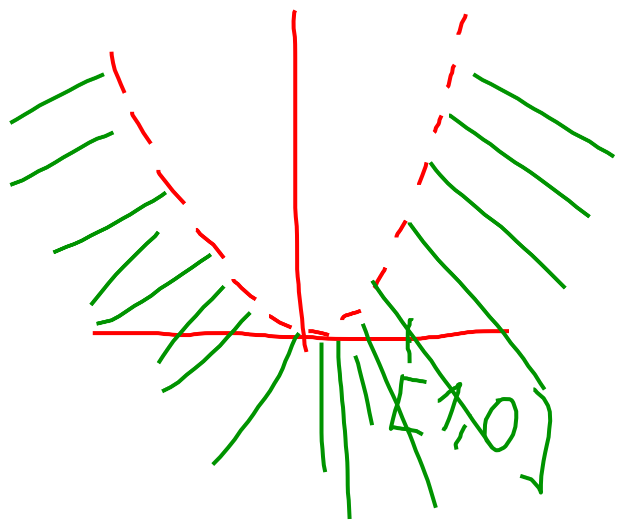
# Definiční obor – řešený příklad

Určete definiční obor funkce: $f(x,y) = \log\left(x^2 - y\right)$.

$x^2 - y > 0$

$x^2 > y$

$1 > 0$ ✓



# Derivace funkce dvou proměnných

Nechť f (x,y) je funkce dvou reálných proměnných.
Pak derivace podle x respektive y značíme takto:

$f_y'$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad f_y'(x,y), \quad f_y{}' \qquad\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f_x'(x,y), \quad f_x{}'$$

Tyto derivace nazýváme parciální derivace.

Definice:

$$f_x'(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$f'$

$$f_y'(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

# Parciální derivace – řešený příklad

Vypočtěte derivace funkce: $f(x,y) = x^2 y + 2y^3$ .

$f'_x = 2xy$

$f'_y = x^2 + 6y^2$

$f''_{xx} = 2y$

$f''_{yy} = 12y$

$f''_{xy} = 2x$

$f''_{yx} = 2x$

# Druhé parciální derivace

Pokud druhé derivace dané funkce existují, značíme je takto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Smíšené derivace se pro spojité funkce vždy rovnají (pokud existují):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

# Druhé parciální derivace – řešený příklad

Určete druhé derivace funkce: $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 5$ .

Řešení:
Nejprve vypočteme první derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x$$

Nyní derivujeme podruhé:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$$

# Cobb – Douglasova funkce

C-D funkce: $Q = AK^{a}L^{b}$ .

$$a + b = 1$$

Obvykle je $Q = AK^{a}L^{1-a}$

Derivací C-D funkce dostaneme mezní produkty práce a kapitálu:

Mezní produkt práce: $MP_L = \dfrac{\partial Q}{\partial L} = AK^{a}(1-a)L^{-a} = \dfrac{A}{1-a}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{a}$

Mezní produkt kapitálu: $MP_K = \dfrac{\partial Q}{\partial K} = AaK^{a-1}L^{1-a} = Aa\left(\dfrac{K}{L}\right)^{a-1}$

# Tečná rovina

Nechť $f(x,y)$ je diferencovatelná funkce v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ .
Potom tečná rovina k funkci f v bodě C je dána jako:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C)\cdot\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(C)\cdot\left(y - y_0\right)$$

Normálový vektor: $$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(C), \frac{\partial f}{\partial y}(C), -1\right)$$

# Tečná rovina – řešený příklad

Určete tečnou rovinu k funkci $f(x,y) = x^3 + xy^2$ v bodě *C* [2,1,10].

Řešení:

Nejprve vypočteme první derivace:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + y^2 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy$$

Dosadíme bod C: $\frac{\partial f}{\partial x}(C) = 3 \cdot 2^2 + 1^2 = 13$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(C) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

Dosadíme do vztahu pro tečnou rovinu:

$$z = 10 + 13 \cdot (x-2) + 4 \cdot (y-1)$$

$$13x + 4y - z - 20 = 0$$

# Totální diferenciál

Nechť je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $C=[c_1,c_2,c_3]$.

Totální diferenciál je definován následovně:

$$df(C)=\frac{\partial f}{\partial x}(C)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(C)dy$$

Totální diferenciál vyjadřuje (přibližně) přírůstek funkce f spojený se změnou x a y.

# Totální diferenciál – řešený příklad

Určete totální diferenciál funkce $f(x,y)=3x^2+5xy+y$ v bodě *C* [1,1,9] pro *dx* = 0,1 a *dy* = 0,2 .

Řešení:

Vypočteme první derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x+5,\frac{\partial f}{\partial y}=5x+1$$

Dosadíme do diferenciálu: $df=(6x+5y)dx+(5x+1)dy$

Nakonec dosadíme číselné hodnoty:

$$df(C)=(6+5)dx+(5+1)dy=11dx+6dy=1{,}1+1{,}2=2{,}3$$

# Samostatné úlohy

Určete definiční obor funkcí:

a) $f(x,y)=\sqrt{2x-y+3}$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\dfrac{1}{x}$

c) $f(x,y)=\arccos\left(3-x\right)$

d) $f(x,y)=\log\left(y^2+x\right)$

e) $f(x,y)=\sqrt{x-y+1}+\sqrt{x+y+1}$

# Samostatné úlohy

Vypočtěte první a druhé derivace:

α) tečna $T[1;1;6]$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$)

β) $df(1;1) = ?$

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = \underline{x}^2\underline{y}^3 + 5\underline{x} + \underline{y} - 1$

$f'_x = 2xy^3 + 5 \Rightarrow f'_x(1,1) = 7$

$f'_y = 3x^2y^2 + 1 \Rightarrow f'_y(1,1) = \boxed{4}$

c) $f(x,y) = e^{x+y}$

d) $f(x,y) = \ln(xy) + \dfrac{5}{x}$

$\rightarrow$ α) $\tau: z = 6 + 7(x-1) + 4(y-1)$

e) $f(x,y) = \ln\left(xy + y^4\right)$

$\rightarrow$ β) $df = 7 \cdot dx + 4 \cdot dy$