Matematika v ekonomii

Přednáška 4

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Extrémy funkce dvou proměnných

Lokální vs globální extrémy.

Vázané extrémy.

Nutná podmínka extrému:

$$\boxed{\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=0}$$

Bod, který splňuje výše uvedenou podmínku, se nazývá stacionární bod.

Extrémy funkce dvou proměnných

Ve stacionárním bodě se může nacházet maximum, minimum nebo inflexní bod.
K rozhodování používáme Hesseovu matici (*hessián)*:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1)(-1) = 12 - 1 = 11 > 0$$

$D > 0 \Rightarrow$ extrém

a) $f''_{xx} > 0 \Rightarrow$ MIN

b) $f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ MAX

Poté použijeme Sylvestrovu větu.

Extrémy funkce dvou proměnných

Označme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ a $D_2 = H_f(C)$.

Jestliže $D_2>0$, pak se jedná o extrém. Pokud je navíc $D_1>0$, jde o minimum. Pro $D_1<0$ dostáváme maximum.

Jestliže $D_2<0$, jde o inflexní bod.

Jestliže $D_2 = 0$, nelze podle hessiánu rozhodnout.

Extrémy funkce dvou proměnných – 1.příklad

Určete extrémy funkce: $f(x,y) = x^3 - 2xy$.

Řešení:
Vypočteme obě parciální derivace a položíme je rovny 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x = 0$$

Obě rovnice řešíme jakou soustavu. Získáme stacionární bod C [0,0].

$$3x^2 - 2y = 0$$
$$-2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Vypočteme druhé derivace a sestavíme hessián:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dosadíme bod C do hessiánu: $Hf(0,0) = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}$.

$D = 0 - (-2)\cdot(-2) =$

$= -4$

Protože $D_2<0$, bod C je inflexní bod. Funkce nemá extrém.

2. příklad

Určete extrémy funkce: $f(x, y) = x^2 - 2xy + y$.

Řešení:
Vypočteme první derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 1 = 0$$

Řešíme soustavu a obdržíme stacionární bod *C* [1/2,1/2].

Druhé derivace a hessián:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hessián obsahuje pouze konstanty (dosazení za C nelze provést).

Protože $D_2 < 0$, stacionární bod C je inflexní bod.

3. příklad

Určete maximum funkce příjmu:

$$TR(Q_1, Q_2) = 50Q_1 + 20Q_2 - 2Q_1^2 - 5Q_2^2$$

Řešení:
Určíme první derivace:

$$\frac{\partial TR(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1} = 50 - 4Q_1 = 0 \qquad \frac{\partial TR(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} = 20 - 10Q_2 = 0$$

Řešením soustavy rovnic výše obdržíme *C* [12,5;2].

Určíme druhé derivace a hessián:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \qquad H_f(C) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Protože $D_2 > 0$, máme extrém.
Protože $D_1 < 0$, jedná se o maximum.

Samostatné úlohy

Určete extrémy funkcí:

a) $f(x,y)=x^2+2y^2-6x+8$

b) $f(x,y)=x^3-xy+y$

c) $f(x,y)=2xy-3x^2-2y^2+10$

d) $f(x,y)=y-\dfrac{x^3}{3}+\ln(x-y)$

.

1) $f = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$

$f''_{xx} = 2$

$\to f'_x = 2x + 4y - 2 = 0 \quad /:2$

$f''_{yy} = 12$

$\to f'_y = 4x + 12y + 8 = 0 \quad /:4$

$f''_{xy} = 4$

$\leftarrow x + 2y - 1 = 0$

$x - 6 - 1 = 0$

$x = 7$

$x + 3y + 2 = 0 \quad /\cdot(-1)$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8 > 0$

$x + 2y - 1 = 0$

$-x - 3y - 2 = 0$

$C[7; -3]$

má extrém

$-y - 3 = 0$

jaký? $2 > 0$

$-3 = y$

$f(7; -3) =$

MIN

Vázané extrémy

Vázané extrémy označují situaci, kdy kromě funkce $f(x, y)$ je ještě zadána *vazba* (omezující podmínka pro *x* a *y*) ve tvaru $g(x, y) = 0$.

Hledáme extrémy funkce , které jsou vázány (leží na ní) křivkou.

Dvě metody řešení: Dosazovací a Lagrangeova.

Dosazovací metoda: z vazby vyjádříme *x* nebo *y* a dosadíme do dané funkce, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit *x* nebo *y*.

2) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1$

$[-2; 1]$ MIN

Pro určení extrému platí následující pravidlo (opět Sylvesterova věta):

$D_2 > 0$: v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je navíc $D1 > 0$; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je $D_1 < 0$.
$D_2 = 0$: o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

Řešení úloh na vázané extrémy si ukážeme na následujících snímcích.

Vázané extrémy – řešený příklad

Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$, je-li vazba $g(x,y): x - y + 1 = 0$.

Řešení:
Z rovnice vazby vyjádříme y: $y = x + 1$

Dosadíme do dané funkce: $f(x) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$

Dále postupujeme jako u funkce o jedné reálné proměnné:

$$f'(x) = 4x + 2 = 0$$

Nulový bod první derivace (stacionární bod): x = -1/2. Snadno ověříme, že se jedná o minimum.

$f''(x) = 4 > 0$