Matematika v ekonomii

Přednáška 5

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Neurčitý integrál

Proces integrování je opačný k procesu derivování.

Značení: $\int f(x)dx = F(x) + C$

↳ primitivní fce k $f(x)$

$F'(x) = f(x)$

$\int x^2 dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{F(x)} + C$

$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{x^2}}$

Legenda:

$\int$ …. Integrační znak

f(x) …. Integrovaná funkce

C …. Integrační konstanta

Neurčitý integrál je lineární operátor:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Integrály řešíme pomocí pravidel výše a tabulky základních Integrálů, viz dále.

.

Základní integrály

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	C
1	$x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Základní integrály

$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{cotg}\, x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{1 \pm x^2} \right\rvert + C$

.

Neurčitý integrál – řešené příklady 1

a) $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$

b) $\int \left(x^3 + 2x^2 + 6x + 1\right) dx = \int x^3 dx + 2\int x^2 dx + 6\int x dx + \int 1 dx = \dfrac{x^4}{4} + 2\dfrac{x^3}{3} + 6\dfrac{x^2}{2} + x + C$

c) $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3\sqrt[4]{x^3}}{4} + C$

d) $\int \dfrac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \dfrac{x^{-4}}{(-4)} = -\dfrac{1}{4x^4} + C$

Neurčitý integrál - řešené příklady 2

a) $\int\left(2x+\frac{5}{x}\right)dx = x^2+5\ln|x|+C$

b) $\int\left(5\sin x-2\cos x+3^x\right)dx = -5\cos x-2\sin x+\frac{3^x}{\ln 3}+C$

c) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx = \int\frac{\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx = \int 1dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx = x-arctgx+C$

d)

1) $\int (x^3+2x+8)\,dx = \frac{x^4}{4}+\frac{2x^2}{2}+8x+C$

2) $\int \left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x| + C$

$x^{1/3}$ $\quad$ x^{-2}

$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{x} + \ln|x| + C$

3) $\int \left(6\sin x+5\cos x+\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$

$= -6\cos x + 5\sin x + \operatorname{arctg} x + C$

Neurčitý integrál – integrační metody

V případě složitějších integrálů používáme integrační metody:

- Parciální zlomky
- Substituční metodu
- Metodu per partes

Užití těchto metod si předvedeme na příkladech.

Neurčitý integrál – racionální funkce

Racionální funkcí nazýváme funkci tohoto tvaru:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

kde P(x) a Q(x) jsou polynomy.

Nejdříve rozložíme jmenovatel na součin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot\left(x-x_2\right)\cdot\ldots\left(x-x_k\right)}$$

Poté mohou nastat tři případy:

1. Všechny kořeny polynomu ve jmenovateli jsou jednoduché.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_k)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{K}{x-x_k}$$

2. Některý kořen, například x_1, je stupně vyššího než 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)^n\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_k)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-x_1)^n}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{K}{(x-x_k)}$$

3. Ve jmenovateli se nachází nerozložitelný kvadratický dvojčlen nebo trojčlen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\underbrace{(ax^2+bx+c)}_{D<0}\cdot(x-x_1)\ldots}=\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}+\frac{C}{x-x_1}\ldots.$$

Parciální zlomky – řešený příklad

Vypočtěte: $\int \frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}dx$.

Řešení: Racionální funkce je typu 1, s kořeny ve jmenovateli -2 a 1. Zlomek rozložíme následovně:

$$\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Ve jmenovateli dostáváme rovnost:

$$3x+3 = A(x-1) + B(x+2)$$

A z ní soustavu rovnic:

$$3 = A + B$$

$$3 = 2B - A$$

Řešením soustavy dostáváme: $A=1, B=2$

Tedy: $$\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$$

Nyní integrujeme:

$$\int\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}dx=\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=\ln|x+2|+2\ln|x-1|+C$$

.

$$\int \frac{2}{x^2-5x}\,dx = \int \frac{-\frac{2}{5}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{2}{5}}{x-5}\,dx =$$

$$\frac{2}{x(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} \quad / \cdot x(x-5)$$

$$\boxed{2 = A(x-5) + Bx}$$

$\boxed{x=0}$

$$2 = -5A$$

$$-\frac{2}{5} = A$$

$\boxed{x=5}$

$$2 = 5B$$

$$\boxed{\frac{2}{5} = B}$$

$$= -\frac{2}{5}\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x-5} =$$

$$= -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{2}{5}\ln|x-5| + C =$$

$$= \frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-5}{x}\right| + C$$