Matematika v ekonomii

Přednáška 6

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Obsah přednášky

Integrace racionálních funkcí – metoda parciálních zlomků.

Integrace součinu funkcí – metoda per partes.

Integrace substituční metodou.

Integrace iracionálních funkcí.

Řešené a samostatné úlohy.

Integrace racionálních funkcí – řešený příklad 1

Vypočtěte: $\int \frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}dx$.

Řešení: ve jmenovateli je kořen x = -1 násobnosti 3.

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x} = \frac{A(x+1)^2 x + B(x+1)x + Cx + D(x+1)^3}{(x+1)^3 x}$$

Z rovnosti jmenovatelů dostaneme:

A = 1, B = 4, C = -2, D = 5.

Rozklad na parciální zlomky je tedy následující:

$$\int \frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}dx = \int \frac{1}{(x+1)}dx + \int \frac{4}{(x+1)^2}dx + \int \frac{-2}{(x+1)^3}dx + \int \frac{5}{x}dx =$$

Nyní integrujeme:

$$= \ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + 5\ln|x| + C$$

Integrace racionálních funkcí – řešený příklad 2

Vypočtěte: $\int \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx$.

Řešení: Jedná se o typ rozkladu č. 3:

$$\frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x}$$

Koeficienty: A = 1, B = -2, C = 2.

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx = \int \frac{x - 3}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x} dx$$

Integrujeme: $\int \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 1\right| - 3arctgx + C$

Integrace racionálních funkcí – řešený příklad 3

Vypočtěte: $\displaystyle\int \frac{7x+26}{x^2+7x+12}dx$.

Řešení: Jedná se o typ rozkladu č. 1:

$$\frac{7x+26}{x^2+7x+12} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+3}$$

Koeficienty: A = 2, B = 5.

Integrujeme: $$\int \frac{7x+26}{x^2+7x+12}dx = \int \frac{2}{x+4}dx + \int \frac{5}{x+3}dx$$

$$\int \frac{7x+26}{x^2+7x+12}dx = 2\ln|x+4| + 5\ln|x+3| + C$$

Integrace per partes

Metoda Per partes se používá pro integraci funkcí ve tvaru součinu dvou funkcí.
Označme u(x) a v(x) obě funkce. Pak:

$$u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v' \longleftarrow \int (u \cdot v)' = \int u'v + \int uv'$$

$$\boxed{u \cdot v - \int u' \cdot v = \int u \cdot v'}$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Poslední řádek je vzorec pro “per partes“.

Integrace per partes – řešený příklad 1

Vypočtěte: $\int x \cdot e^x dx$.

Řešení:

$$\int x \cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, v' = e^x \\ u' = 1, v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

Pozn.: volba u a v´ je důležitá. Pokud ji provedeme nesprávně, integrál se nezjednoduší.

1) $\int (2x+5)e^{x}dx = \left| \begin{array}{ll} u=2x+5 & v'=e^{x} \\ u'=2 & v=e^{x} \end{array} \right| =$

$= (2x+5)e^{x} - \int 2e^{x}dx = (2x+5)e^{x} - 2e^{x} + C$

2) $\int (4x+3)\sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=4x+3 & v'=\sin x \\ u'=4 & v=-\cos x \end{array} \right| =$

$= -\cos x\cdot(4x+3) - \int(-4\cos x)\,dx = -\cos x(4x+3) + 4\sin x + C$

$+\int 4\cos x\,dx =$

3) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right|$

D
o

$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \underbrace{\int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx}_{-\frac{1}{3}\int x^2 dx} = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$

Integrace per partes – řešený příklad 2

Vypočtěte: $\int x \cdot \ln x dx$.

Řešení:

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, v' = x \\ u' = \frac{1}{x}, v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Integrace per partes – řešený příklad 3

Vypočtěte: $\int x \sin x dx$.

Řešení:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x, v' = \sin x \\ u' = 1, v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Integrace per partes – řešený příklad 4

Vypočtěte: $\int arctgx dx$.

Řešení:

$$\int arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{1+x^2}, v = x \end{matrix} \right| = x arctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x arctgx - \frac{1}{2} \ln\left| x^2 + 1 \right| + C$$

Integrace per partes – řešený příklad 5

Vypočtěte: $\int \sin x e^x dx$.

Řešení:
$$\int \sin x e^x dx = \begin{vmatrix} u = \sin x, v' = e^x \\ u' = \cos x, v = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = \cos x, v' = e^x \\ u' = -\sin x, v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

Nyní označme hledaný integrál *I*:

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

Odkud plyne:

$$I = \frac{\sin x e^x - \cos x e^x}{2} + C$$

Substituční metoda integrace

Substituci používáme v následujících případech:

- Když integrand obsahuje složenou funkci.
- Když integrand obsahuje lnx nebo exp(x).
- Když integrand obsahuje goniometrické funkce.
- Když integrand obsahuje odmociny.

Integrace substitucí – řešený příklad 1

Vypočtěte: $\int (2x+1)^4\, dx$

Řešení:

$$\int (2x+1)^4\, dx = \begin{vmatrix} 2x+1=t \\ 2dx = dt \end{vmatrix} = \int t^4 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^4 dt = \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} + C = \frac{t^5}{10} + C = \frac{(2x+1)^5}{10} + C$$

Pozn.: Nenahrazujeme pouze integrand, ale také dx!

Integrace substitucí – řešený příklad 2 a 3

Vypočtěte: $\int e^{2x+3}dx$

Řešení: $\int e^{2x+3}dx = \left| \begin{matrix} 2x+3=t \\ 2dx=dt \end{matrix} \right| = \int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$

Vypočtěte: $\int \cos\left(5x-4\right)dx$

Řešení:

$$\int \cos\left(5x-4\right)dx = \left| \begin{matrix} 5x-4=t \\ 5dx=dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{\sin t}{5} + C = \frac{\sin(5x-4)}{5} + C$$

Integrace substitucí – řešený příklad 4 a 5

Vypočtěte: $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Řešení: $$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

Vypočtěte: $\int \frac{5}{x \ln^2 x} dx$

Řešení: $$\int \frac{5}{x \ln^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{5}{t^2} dt = -\frac{5}{t} + C = \frac{-5}{\ln|x|} + C$$

Integrace goniometrických funkcí

Důležité vztahy:

(1)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(2)	$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$
(3)	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
(4)	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
(5)	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

1) $\int (4x+5)^6 dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x+5 \\ dt = 4\,dx \\ \frac{dt}{4} = dx \end{array} \right| = \int t^6 \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int t^6 dt =$

$= \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{t^7}{7} + C}$, $t = 4x+5$

2) $\int \frac{x^3}{x^4+3} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^4+3 \\ dt = 4x^3 dx \\ \frac{dt}{4x^3} = dx \end{array} \right| = \int \frac{\cancel{x^3}}{t} \cdot \frac{dt}{4\cancel{x^3}} =$

$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln|t| + C =$

$\underbrace{\frac{1}{4} \ln|x^4+3| + C}$

3) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\sin t}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\,dt = 2\cdot\int \sin t\,dt =$$

$$= 2\cdot(-\cos t) + C =$$

$$= -2\cos\sqrt{x} + C$$

Univerzální goniometrická substituce

(1)	$tg\,\frac{x}{2} = t$
(2)	$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$
(3)	$\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$
(4)	$dx = \frac{2}{1+t^2}$

Integrace iracionálních funkcí – řešený příklad 1

Vypočtěte: $\int \sqrt{4x+1}\,dx$.

Řešení: nahradíme celou odmocninu.

$$\int \sqrt{4x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4x+1} = t \\ 4x+1 = t^2 \\ 4dx = 2tdt \end{array} \right| = \int t \cdot \frac{tdt}{2} = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + C = \frac{t^3}{6} + C = \frac{\left(\sqrt{4x+1}\right)^3}{6} + C$$

Integrace iracionálních funkcí – řešený příklad 2

Vypočtěte: $\int \sqrt{5-2x}\,dx$.

Řešení: nahradíme celou odmocninu.

$$\int \sqrt{5-2x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{5-2x} = t \\ 5-2x = t^2 \\ -2dx = 2tdt \end{array} \right| = -\int t \cdot t\,dt = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\left(\sqrt{5-2t}\right)^3}{3} + C$$

Integrace iracionálních funkcí – řešený příklad 3

Vypočtěte: $\int 2x\sqrt{x^2+10}\,dx$.

Řešení: opět nahradíme celou odmocninu.

$$\int 2x\sqrt{x^2+10}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+10} = t \\ x^2+10 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \end{array} \right| = \int t \cdot 2tdt = 2\int t^2 dt = 2\frac{t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x^2+10}\right)^3}{3} + C$$

Integrace iracionálních funkcí – řešený příklad 4

Vypočtěte: $\int x\sqrt{x^2-1}dx$

Řešení:

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-1}=t \\ x^2-1=t^2 \\ 2xdx=2tdt \\ xdx=tdt \end{array} \right| = \int t\cdot tdt = \int t^2dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3}+C$$

Pozn.: Podívejte se i na Eulerovy substituce.

Samostatné úlohy

Vypočtěte:

a) $\int (3x-2)^4 \, dx$

b) $\int \sin(1-5x) dx$

c) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

d) $\int \cos^3 x dx$

e) $\int \sqrt{2x+5} dx$

Samostatné úlohy

Vypočtěte:

a) $\int x\sqrt{x^2+2}dx$

b) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

c) $\int \cos^4 x \sin x dx$

d) $\int \sqrt{2x-14}dx$