Matematika v ekonomii

Přednáška 7

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Určitý integrál

Newtonův určitý integrál:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

V definici výše je F primitivní funkce k f, *a* a *b* jsou integrační meze.

Pozn.: Výsledkem určitého integrálu je vždy číslo.

Určitý integrál – základní vlastnosti

Základní vlastnosti určitého integrálu:

i) $\int_a^a f(x)dx = 0$

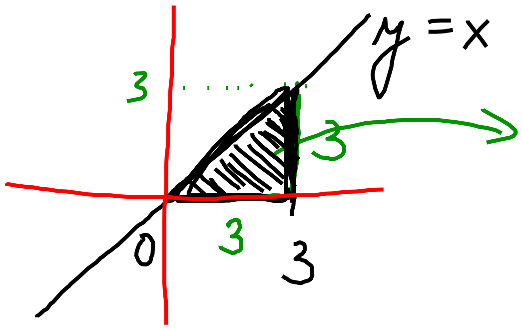
ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

iv) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

v) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

$$\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}$$



$$S = \frac{9}{2}$$

Určitý integrál – základní vlastnosti

Bod i): integrace přes interval nulové délky je nula.

Bod ii): při výměně mezí integrál změní znaménko.

Bod iii): multiplikační konstantu lze vytknout před integrál.

Bod iv): lze integrovat člen po členu.

Bod v): interval integrace lze rozdělit.

Užití určitého integrálu

- Obsah plochy pod nebo nad danou křivkou,
- Obsah plochy sevřené dvěmi a více křivkami,
- Délka křivky,
- Objem a povrch rotačního tělesa,
- A další….

Určitý integrál – obsah plochy

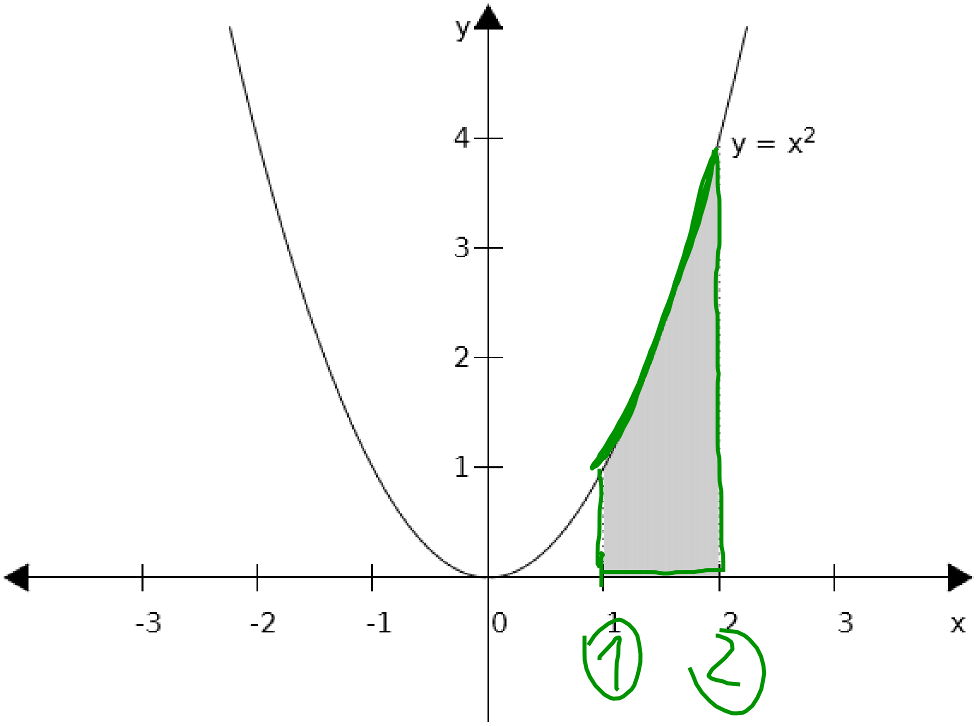
Určete: $\int_1^2 x^2 dx$

Řešení: $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

Jaký je význam oněch 7/3?

Je to obsah plochy pod křivkou f(x) na intervalu (1,2), viz následující obrázek.

Určitý integrál – obsah plochy



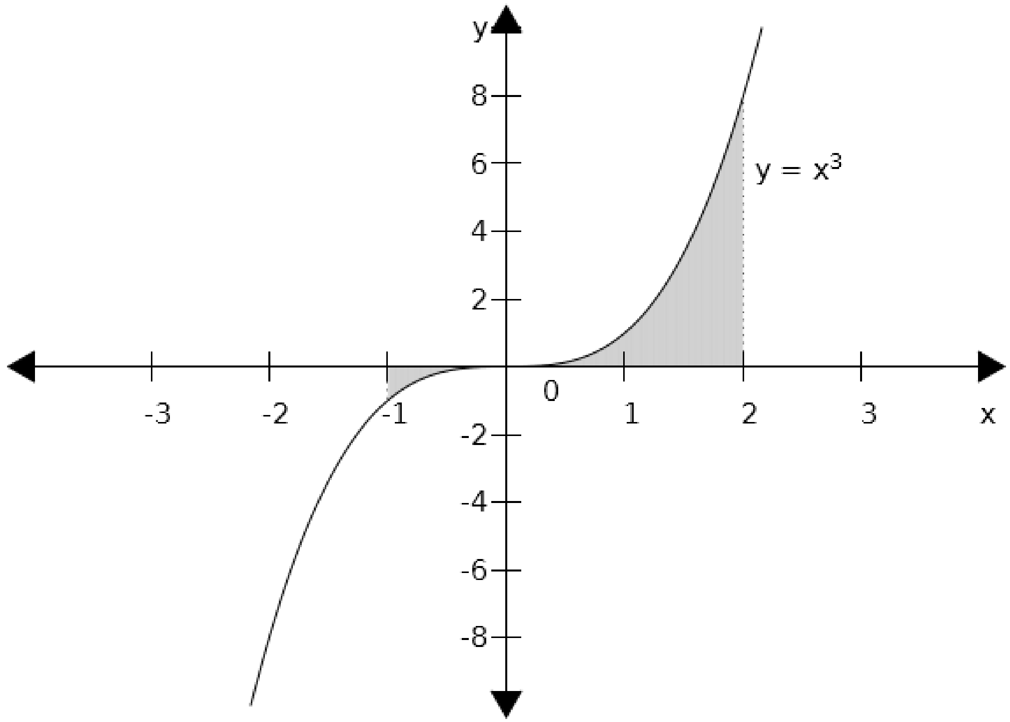
Určitý integrál – řešený příklad 1

Určete obsah plochy omezené křivkami: $y = x^3$, osa x, x = -1 a x = 2.

Řešení: Interval integrace rozdělíme na (-1,0) a (0,2). Pak integrujeme:

$$S = \int_{-1}^{0} \left| x^3 \right| dx + \int_{0}^{2} x^3 dx = \left| \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} \right| + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{0}^{2} = \left| 0 - \frac{1}{4} \right| + \left(4 - 0 \right) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

Určitý integrál – řešený příklad 1



Určitý integrál - řešený příklad 2

Určete: $\int_0^3 x^2 dx$

Řešení: $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$

Obsah plochy pod danou křivkou na intervalu (0,3) je 9 čtverečných jednotek.

Pozn. : Kladné funkci přiřazuje určitý integrál kladnou hodnotu, záporné funkci zápornou!

Určitý integrál – řešený příklad 3 a 4

Vypočtěte: $\int_0^{\pi} \sin x dx$

Řešení: $\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$

Vypočtěte: $\int_0^{\pi/2} 6 \sin^2 x \cdot \cos x dx$

Řešení: $\int_0^{\pi/2} 6 \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left[2 \sin^3 x\right]_0^{\pi/2} = 2 \sin^3 \frac{\pi}{2} - 2 \sin^3 0 = 2 - 0 = 2$

Určitý integrál – per partes

Metoda per partes:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Příklad:

$$\int_1^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, v' = e^x \\ u' = 1, v = e^x \end{vmatrix} = \left[x\cdot e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = \left(2\cdot e^2 - 1\cdot e^1\right) - \left[e^x\right]_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e^1) = e^2$$

Per partes – řešený příklad 1

Řešte metodou per partes: $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

Řešení:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x}, v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx = \left(\frac{e^3}{3} \cdot \ln e - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 \right) - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Per partes – řešený příklad 2

Řešte metodou per partes: $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

Řešení:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x, v' = \sin x \\ u' = 1, v = -\cos x \end{matrix} \right| = \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\cos x \right) dx = \left(\pi + 0 \right) + \left[\sin x \right]_0^{\pi} = \pi + 0 + 0 = \pi$$

Substituce v určitém integrálu

Při substituci nahrazujeme nejen danou funkci a dx, ale také integrační meze!

Příklad:

$$\int_0^3 (2x+1)^3\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x+1=t \\ 2dx = dt \qquad dx = \frac{dt}{2} \\ x=3 \to t=7 \\ x=0 \to t=1 \end{array} \right| = \int_1^7 t^3 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^7 t^3\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^7 = \frac{1}{2}\left(\frac{7^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2400}{4} = 300$$

Substituce v určitém integrálu - řešený příklad 1

Vypočtěte: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+2} = t \\ x^2+2 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ x = 0 \rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = 1 \rightarrow t = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{3}$$

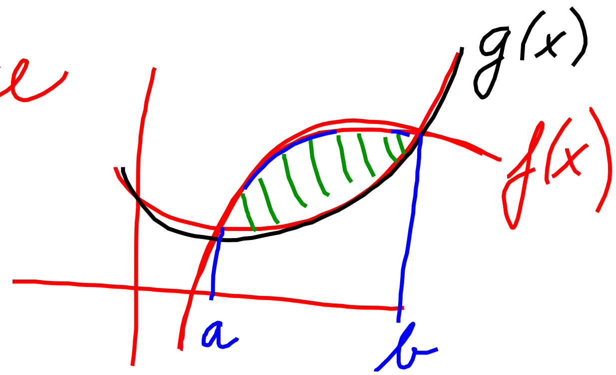
Substituce v určitém integrálu - řešený příklad 2

Vypočtěte: $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$.

Řešení:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int_0^{\pi} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

obsah obrazce



$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

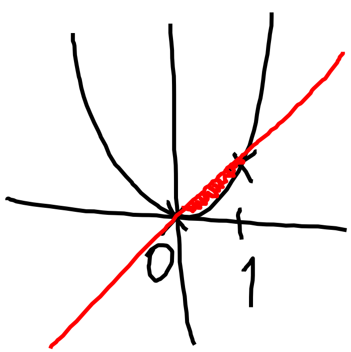
1) $y = x^2; \ y = x$

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x \cdot \underbrace{(x-1)}_{} = 0$$

$x = 0 \quad x = 1$

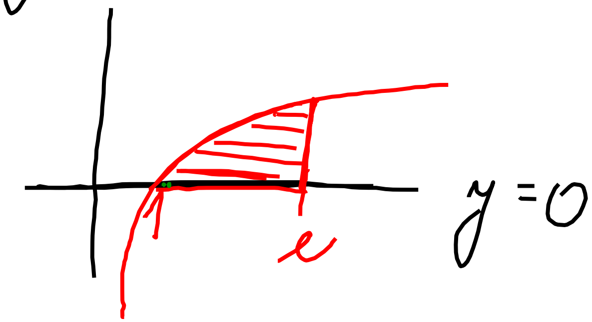


$$S = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (0 - 0) =$$

$$= \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

2) $y = \ln x$; $\overset{y=0}{\text{osa } x}$; na $x \in \langle 1; e \rangle$



$e = 2{,}71\ldots$

↳ Eulerovo č.

$$\boxed{\ln x = \log_e x}$$

$$S = \int_1^e (\ln x - 0)\,dx = \Big[x \cdot \ln x - x\Big]_1^e = e \cdot \underbrace{\ln e}_{1} - e - (1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - 1) = 1$$

$$\int 1 \cdot \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{1}\,dx = \underbrace{x \cdot \ln x - x + C}$$

Substituce v určitém integrálu - řešený příklad 3

Vypočtěte: $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{2}{x \ln x}\,dx$.

Řešení:

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{x \ln x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \dfrac{1}{x}\,dx = dt \end{array} \right| = \int_e^{e^2} 2t\,dt = \left[t^2\right]_e^{e^2} = \left[\ln x\right]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$$

Samostatné úlohy

Vypočtěte:

a) $\int_0^4 x^3 dx$

b) $\int_1^4 \left(6x^2 + 4x - 1\right) dx$

c) $\int_{-3}^3 \left(x^3 - x\right) dx$

d) $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

e) $\int_0^\pi \sin x dx$

Obsah plochy sevřené dvěma křivkami

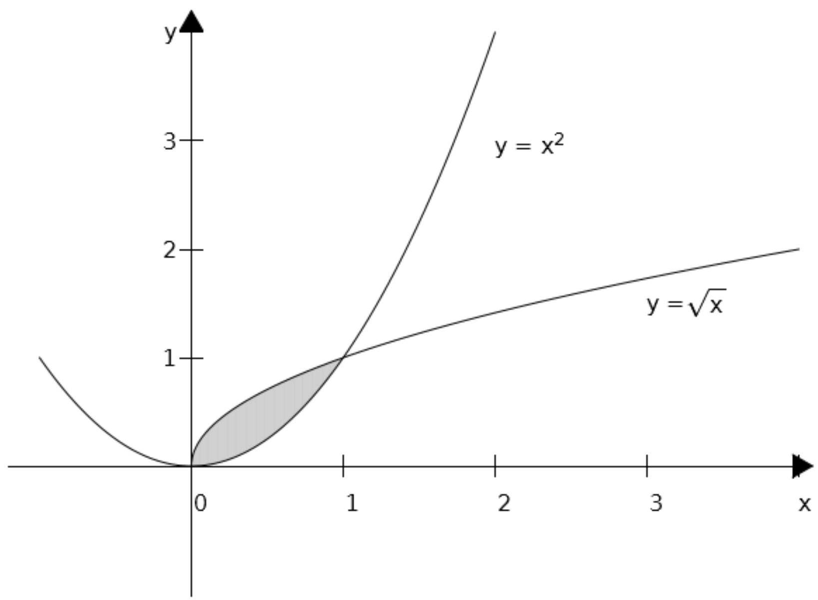
Nechť f(x) a h(x) jsou dvě funkce (křivky), které ohraničují určitou plochu s obsahem S, a nechť *a* a *b* jsou jejich (x-ové) průsečíky.

Pak je obsah plochy dán jako:

$$S = \int_a^b \left(h(x) - f(x) \right) dx$$

Obsah plochy – řešený příklad 1

Určete obsah plochy sevřené křivkami $y = \sqrt{x}$ a $y = x^2$.



Řešení:

Najdeme průsečíky obou křivek: x = 0 a x = 1, která z plyne rovnosti obou funkcí:

$$x^2 = \sqrt{x}$$

Nyní dosadíme do vztahu pro obsah plochy:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(0 - \frac{0}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Obsah plochy – řešený příklad 2

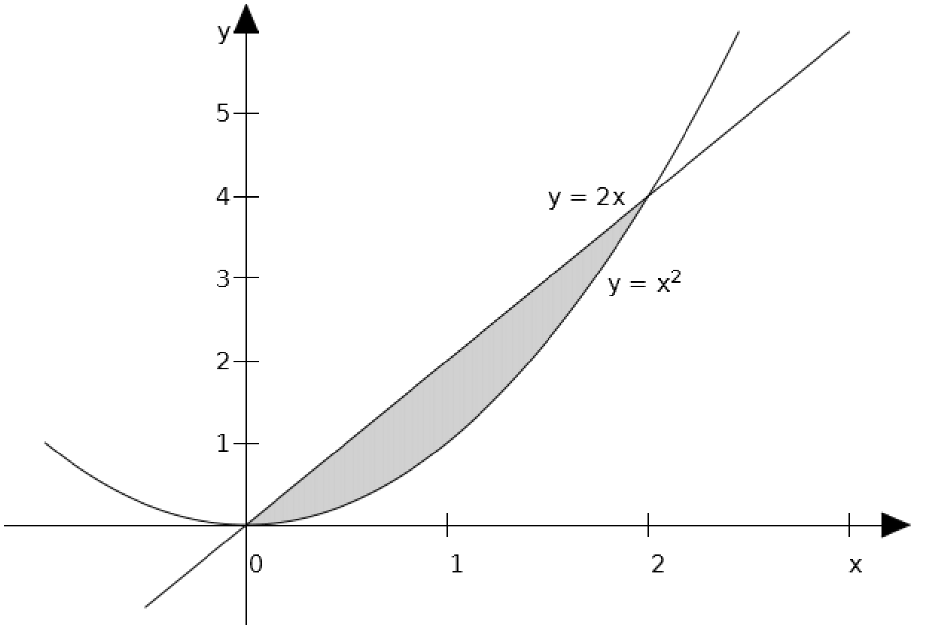
Určete obsah plochy sevřené křivkami $y = 2x$ a $y = x^2$.

Řešení:
Opět začneme s nalezením průsečíků. Rovnice $x^2 = 2x$ má kořeny x = 0 a x = 2.

Nyní integrujeme:

$$S = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(0 - \frac{0}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Obrázek:



Objem rotačního tělesa

Nechť těleso T vznikne rotací křivky f(x) kolem osy x. Pak je objem tělesa dán takto:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Pozn: můžeme si představit, že těleso rozřežeme na tenké válce kolmé k ose x.

Objem rotačního tělesa – řešený příklad 1

Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y=\sqrt{x}$ kolem osy x a intervalu (0,3).

$$V=\pi\int_0^3\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^3 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\pi\left(\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{9}{2}\pi$$

Poznámka: Jde o rotační paraboloid.

Objem rotačního tělesa – řešený příklad 2

Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y = x^2$ kolem osy x a intervalu (1,2).

Řešení:

$$V = \pi \int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} \right) = \frac{31}{5} \pi$$

Objem rotačního tělesa – řešený příklad 3

Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací

křivky $y = \dfrac{1}{x}$ kolem osy x a intervalu (1,4).

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{1} \right) = \frac{3}{4} \pi$$

Pozn.: Jde o rotační hyperboloid.

Samostatné úlohy

Určete obsah plochy sevřené křivkami:

a) $y = x^2; y = x$

b) $y = x^3; y = 9x$

c) $y = \frac{x^3}{3}; y = x^2$