Matematika v ekonomii

Přednáška 8

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Obsah přednášky

Aplikace integrálního počtu v ekonomii:

1) Přebytek spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence.
2) Celkový příjem jako integrál toku příjmu.
3) Nekonečné číselné řady.

Přebytek spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence

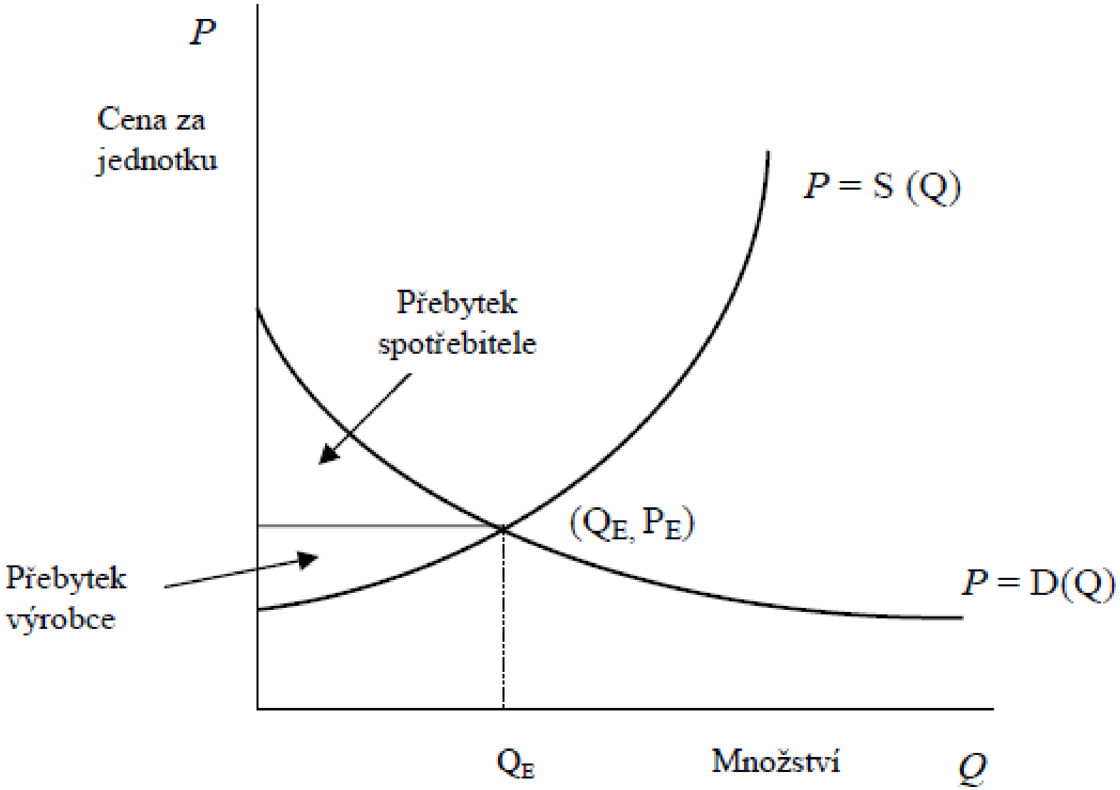
Přebytek spotřebitele (CS) a výrobce (PS) v podmínkách dokonalé konkurence je definován takto:

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q)dQ - Q_E P_E$$

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q)dQ$$

Vysvětlení viz obrázek.

Přebytek spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence



Obr. 9.6. Zdroj: Godulová et. al. (2000).

Přebytek spotřebitele a výrobce - řešený příklad 1

Určete CS a PS: $S(Q) = 4 + Q$ a $D(Q) = \dfrac{54}{Q+1}$.

Řešení:

V bodě rovnováhy se obě funkce rovnají:

$$4 + Q = \frac{54}{Q+1}$$

Tato rovnice má dva kořeny: Q = 5 a Q = -10.

Záporný kořen zamítneme, máme tedy: Q_E=5.

Nyní můžeme dosadit do dříve uvedených vzorců pro CS a PS:

$$CS = \int_0^5 \frac{54}{Q+1} dQ - 45 = \left[54 \ln\left|Q+1\right|\right]_0^5 - 45 = 54 \ln 6 - 45 = 51,76$$

$$PS = 45 - \int_0^5 \left(4+Q\right) dQ = 45 - \left[4Q + \frac{Q^2}{2}\right]_0^5 = 45 - 32,5 = 12,5$$

Pozn.: Výsledek musí být kladný.

Přebytek spotřebitele a výrobce - řešený příklad 2

Určete CS a PS: $S(Q) = 20 + 3Q$ a $D(Q) = 60 - 2Q$.

Řešení:

V bodě rovnováhy se obě funkce rovnají:

$$20 + 3Q = 60 - 2Q$$

Tato rovnice má kořen Q = 8, kterému odpovídá P = 44.

Nyní můžeme dosadit do vzorců pro CS a PS:

$$CS = \int_0^8 (60 - 2Q)dQ - 8 \cdot 44 = \left[60Q - Q^2\right]_0^8 - 352 = 480 - 64 - 352 = 64$$

$$PS = 352 - \int_0^8 \left(20 + 3Q\right) dQ = 352 - \left[20Q + 3\frac{Q^2}{2}\right]_0^8 = 352 - (160 - 96) = 288$$

Celkový příjem jako integrál toku příjmu

Nechť celkový příjem (TR) je dán jako suma z toku f (t) během určitého období t_1 až t_2. Pak:

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f\left(t\right)dt$$

Příkladem mohou být tržby velkých obchodních řetězců nebo bank.

Celkový příjem jako integrál toku příjmu – řešený příklad 1

Určete celkový příjem (TR), je-li dán tok příjmů $f(t) = \dfrac{120000}{t+5}$,

a časový interval je vymezen hodnotami 1 a 15 (např. dní nebo let).

Řešení:

$$TR = \int_1^{15} \frac{120000}{t+5}\,dt = 120000 \int_1^{15} \frac{1}{t+5}\,dt = 120000 \left[\ln|t+5| \right]_1^{15} = 120000 \left(\ln 15 - \ln 1 \right) =$$

= 324 996 (jednotka).

Nekonečné číselné řady

Nekonečná číselná řada je definována následovně:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Jednotlivé členy řady jsou obecně reálná čísla.

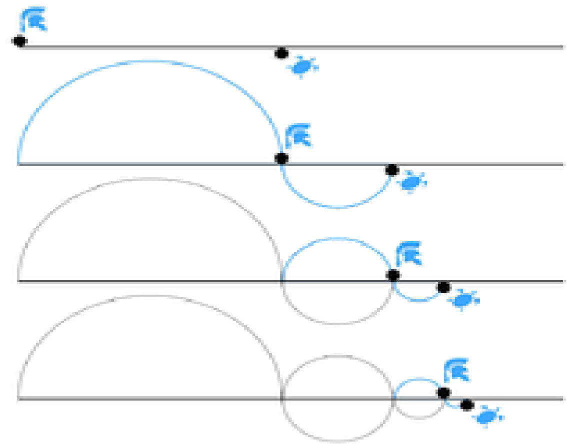
- Jestliže má daná řada konečný součet, nazývá se konvergentní
- V opačném případě je řada divergentní.

Nekonečné číselné řady

Nejdůležitější problémy:

- Je daná řada konvergentní nebo divergentní?
- Pokud je řada konvergentní, jaký je její součet?

Historická poznámka: Zenónův paradox o Achillovi a želvě ilustruje, že starověcí Řekové považovali součet nekonečné řady vždy za nekonečný.



Achilles a želva je starověký paradox, kterým prý Zénón z Eleje dokazoval nemožnost pohybu. Achilles – nejrychlejší běžec – nikdy nedohoní želvu, která je o kus před ním. V okamžiku, kdy totiž doběhne na původní místo želvy, želva se posunula o malý kousek dál. Když Achilles uběhne tento kousek, je želva zase o kousek dál a tak až do nekonečna. Jeho pohyb lze tedy popsat jako nekonečnou řadu stále kratších úseček, což pro starší řecké filosofy představovalo nepřekonatelný paradox.
Paradox reprodukuje Aristotelés ve své Fyzice a ukazuje, v čem je mylný.[Chyba úvahy tkví v tom, že i součet nekonečné řady může být konečný, pokud se její členy dostatečně rychle zmenšují. Tak je tomu i v tomto případě. Zenónova úvaha je nicméně jednou z prvních ukázek uvažování, které vedlo k vynálezu infinitesimálního počtu.

Nekonečné číselné řady – řešený příklad 1

Příklad: Uvažujme dělení pizzy tak, že v každém kroku se odkrojí ½ toho, co v předešlém kroku. Množství odkrojené pizzy je pak možné vyjádřit jako nekonečnou řadu:

nekonečná geometrická řada

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

$$s = \frac{a_1}{1-q}; \quad q \in (-1;1)$$

Jaký je součet této řady? ☺

$$s = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Nekonečné číselné řady – řešený příklad 2 a 3

Příklad: Určete součet Grandiho řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Součet neexistuje (proč?).

Příklad k zapamatování: Určete součet harmonické řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty$$

Nutná podmínka konvergence

Nutná podmínka konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

N.P.K. Je-li $\sum a_n$ (K) $\Rightarrow \lim a_n = 0$

důsledek: Je-li $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ (D)

Slovně: členy dané řady se musí zmenšovat k nule.

Pozor (!): Pokud daná řada tuto podmínku nesplňuje, je divergentní. Pokud ji splňuje, může, ale nemusí konvergovat.

Kritéria konvergence

Konvergenci (divergenci) řad určujeme na základě tzv. kritérií konvergence. Nejznáměší kritéria:

- Srovnávací
- Podílové (d´Alembertovo)
- Odmocninové (Cauchyho)
- Integrální.

Nekonečné číselné řady – Dirichletova řada

Dirichletova řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje pro $\alpha > 1$.

Je často používaná jako srovnávací kritérium.

Příklad: dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ konverguje.

Řešení: Každý člen dané řady je menší než odpovídající člen řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Proto daná řada konverguje.

Dirichletova ř.

$$\sum \frac{1}{(an+b)^{\alpha}} \qquad \begin{array}{l} \alpha \leq 1 \Rightarrow D \\ \alpha > 1 \Rightarrow K \end{array}$$

a) $\sum \frac{1}{n^1}$ D

b) $\sum \frac{1}{n^2}$ K

c) $\sum \frac{1}{n^2+1}$ K d) $\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$ K

e) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+4}}$ D

$\alpha = \frac{1}{2}$

Nekonečné číselné řady – podílové kritérium

Věta 10.3. *(Limitní podílové kritérium). Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L = 1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

$$\sum \frac{(n+1)!}{3^n}; \quad L = \lim \frac{\frac{(n+2)!}{3^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{3^n}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{(n+1)!}} = \infty > 1$$

D

Nekonečné číselné řady – podílové kritérium

Používáme v případě, že členy řady tvoří faktoriály.

Příklad: Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0$$

Řada konverguje.

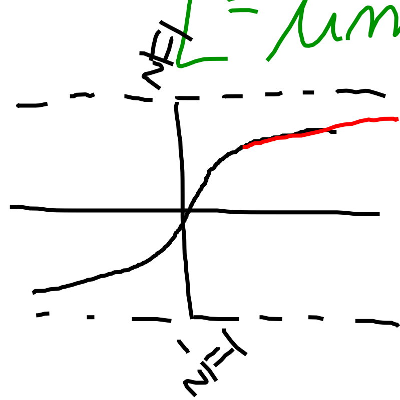
Rozhodovací tabulka:
Pro L < 1 řada konverguje, pro L > 1 diverguje, pro L= 1 nelze rozhodnout.

Nekonečná číselná řada – odmocninové kritérium

Věta 10.4. *(Limitní odmocninové kritérium). Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. *Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L = 1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

$$\sum (\operatorname{arctg} n)^n \qquad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\operatorname{arctg} n)^n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} > 1$$



D

Nekonečná číselná řada – odmocninové kritérium

Používáme pro řady s mocninami nebo exp funkcemi.

Příklad:Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

Řešení: $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{3}{5}$

Protože L < 1, řada konverguje.

Odmocninové kritérium – řešený příklad 1

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Řešení:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3}\right)^n} = \frac{4}{3}$$

Protože L > 1, řada diverguje.

Nekonečné číselné řady – integrální kritérium

***Věta 10.5.** (Integrální kritérium). Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy,* $a_n = f(n)$*, a nechť* $f(x)$ *je spojitá a nerostoucí funkce na intervalu* $(a,+\infty)$*. Potom daná řada konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

$$\boxed{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{x^{-2}} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} =$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \underline{\underline{1}} \text{ konverguje}$$

Nekonečné číselné řady – integrální kritérium

Nejobecnější kritérium, které lze použít když ostatní kritéria selžou.

Příklad: Rozhodněte o konvergenci harmonické řady

Řešení:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_{1}^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

Protože výsledek je nekonečný, řada diverguje..

Nekonečné číselné řady – Leibnizovo kritérium

Používá se pro alternující řady.

Věta 10.6. *(Leibnizovo kritérium). Nechť* $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *je alternující řada a nechť platí:*

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in N$

Pak je řada $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ *konvergentní.*

Leibnizovo kritérium – řešený příklad 1

Příklad: Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Řešení: Zkontrolujeme, zda jsou splněny předpoklady kritéria:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},\forall n\in N$$

Podmínky jsou splněny, proto řada konverguje.

Pozn: Daná řada ale nekonverguje absolutně.

Nekonečné číselné řady – operace s řadami

Povolené operace s konvergentními řadami zahrnují:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \pm b_n \right)$

Obě tyto operace nemají vliv na konvergenci.